# Aula 11

## Continuidade de Funções Complexas

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que **f é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(f(z_0))$$

Definição (Heine): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que **f é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\{z_n\} \subset D_f} : z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0)$$

Teorema: As definições de continuidade à Heine e à Cauchy são equivalentes.

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Então, f é contínua no ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_f$ se e só se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são contínuas em $(x_0, y_0)$ (no sentido de $\mathbb{R}^2$).

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções contínuas no ponto $z_0 \in D_f \cap D_g$. Então, são contínuas em $z_0$ as funções

- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g} \qquad (g(z_0) \neq 0)$.

Se $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em $f(z_0) \in D_h$ então também é contínua em $z_0$ a composta $h \circ f$.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Então, $f$ é contínua em $z_0 \in D_f$ se, qualquer que seja a vizinhança aberta $A$ de $f(z_0)$, existe uma vizinhança aberta $V_{z_0}$ de $z_0$ tal que

$$f(V_{z_0} \cap D_f) \subset A.$$

Mais geralmente, $f$ é contínua em todos os pontos do seu domínio $D_f$ se a pré-imagem $f^{-1}(A)$ de qualquer aberto $A$ é a intersecção dum aberto $O$ com o domínio

$$f^{-1}(A) = O \cap D_f.$$

# Compacidade

Definição: Diz-se que um conjunto $K$ é **compacto** se, qualquer que seja a cobertura de $K$ por abertos

$$K \subset \cup_\alpha A_\alpha,$$

é possível reter apenas um número finito desses abertos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que ainda cobrem $K$ (diz-se uma subcobertura finita)

$$K \subset \cup_1^m A_j.$$

Teorema (Heine-Borel): Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado. Isso é verdade em particular para subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, isométrico a $\mathbb{R}^2$.

Teorema: Um conjunto complexo $K \subset \mathbb{C}$ é compacto se e só qualquer sucessão $\{z_n\}$ de pontos em $K$ tem uma subsucessão convergente para um ponto de $K$.

Teorema: Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos de $K$, então $f(K)$ é compacto.

Corolário (Teorema de Weierstrass): Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de $K$, então $f$ tem máximo e mínimo.